

1 定在波発生 of 数学的説明

波動 $f(t) = \cos \omega t$ が線路上を無損失で伝搬すると、到達距離 l の点における進行波 $f(t)$ は次式で表現されます。

$$f(t) = \cos(\omega t - \beta l) \quad \text{ただし、} \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{以下同じ。} \quad (1)$$

この関数の時間、位相および位置の関係は図 1 で表すとおりです。

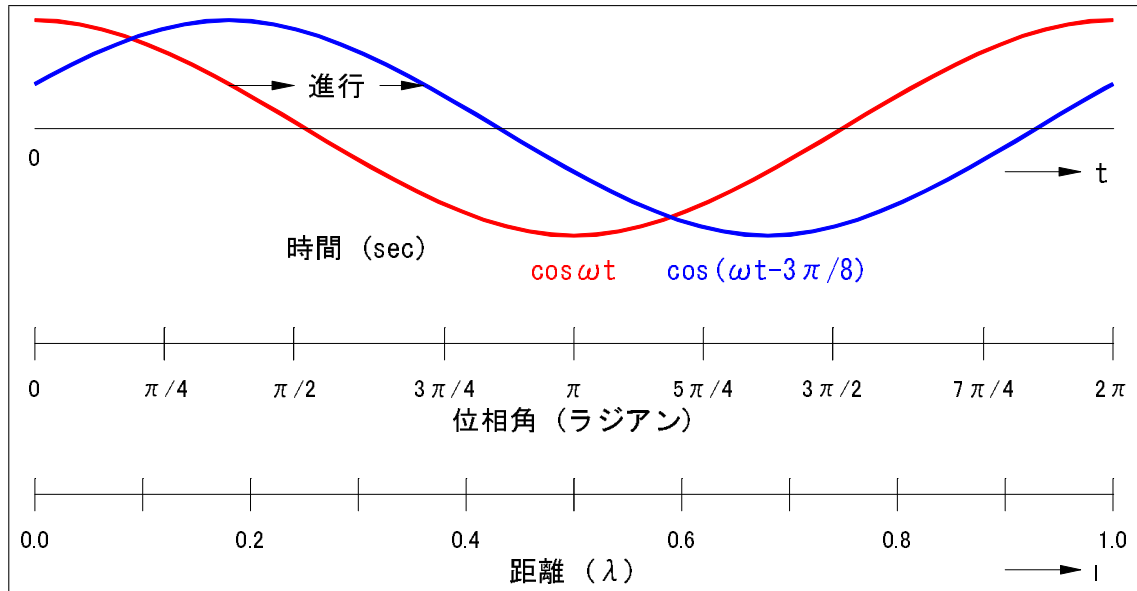


図 1: 線路上の振動

この線路上の反射点距離 L から反射率 $1 \geq r \geq -1$ で波動が反射されるとすると、 l 点における反射波 $g(t)$ は次式となります。

$$g(t) = r \cos(\omega t - \beta(2L - l)) \quad \text{ただし、} L \geq l \geq 0. \quad (2)$$

L 点より手前では進行波と反射波は合成されて、 l 点における波動 $h(t)$ は次式となります。なお、 L 点以遠では波動 $g'(t) = (1 - |r|) \cos(\omega t - \beta l)$ が進行します。また、反射波が波動源に帰ってきた点 (つまり、 $l = 0$) においては、波動源の内部インピーダンスと伝送線 の特性インピーダンスが等しければ、反射波が L 方向に逆反射されることはありません。

$$h(t) = \cos(\omega t - \beta l) + r \cos(\omega t - \beta(2L - l)) \quad (3)$$

三角関数の次の和積公式を用いて、式 3 を変形します。

$$\cos(\alpha - \gamma) = \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma$$

$$h(t) = \cos \omega t \cos \beta l + \sin \omega t \sin \beta l + r \cos \omega t \cos \beta(2L - l) + r \sin \omega t \sin \beta(2L - l) \quad (4)$$

式 4 中の $\cos\beta(2L-l)$ および $\sin(2L-l)$ はさらに展開し、整理して次式を得ます。

$$h(t) = ((1+r\cos 2\beta L)\cos\beta l + r\sin 2\beta L\sin\beta l)\cos\omega t + ((1-r\cos 2\beta L)\sin\beta l + r\sin 2\beta L\cos\beta l)\sin\omega t \quad (5)$$

式 5 には、カッコ内の係数をもった波動が直交形式で表現されています。ここで三角関数の次の合成公式を用いて、実数形式に変形します。

$$a\cos\alpha + b\sin\gamma = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha-\theta) \quad \text{ただし、} \theta = \cos^{-1} a/\sqrt{a^2+b^2}$$

$$h(t) = \sqrt{((1+r\cos 2\beta L)\cos\beta l + r\sin 2\beta L\sin\beta l)^2 + ((1-r\cos 2\beta L)\sin\beta l + r\sin 2\beta L\cos\beta l)^2} \cos(\omega t - \theta) \quad (6)$$

これが、任意の反射点 L からの反射を考慮した点 l における波動の一般式です。位相定数 θ の計算は可能ですが、本テーマには関係しないので未知数のままとします。

電圧の大きさは式 6 の振幅係数 $h(l)$ をとればよいので、次式となります。

$$h(l) = \sqrt{((1+r\cos 2\beta L)\cos\beta l + r\sin 2\beta L\sin\beta l)^2 + ((1-r\cos 2\beta L)\sin\beta l + r\sin 2\beta L\cos\beta l)^2} \quad (7)$$

$L = 0.25\lambda$ 、 $L = 0.75\lambda$ などの特殊条件では上式は簡単になりますが、以下では gnuplot や Excel などの PC ソフトを用いて作図するので、このままにしておきます。

2 定在波の現れ方

教科書では一般に、定在波を概念的に説明していますが、ここで式 7 に基づいて定量的に解析してみます。

2.1 反射係数 r が異なる場合の定在波

l をパラメータとした振幅係数特性は、式 7 に含まれる定数 r および L に左右されますので、仮に $L = 0.6\lambda$ と置いて計算します。その結果を、 $r = 1.0$ 、 $r = 0.5$ 、 $r = -0.5$ および $r = -1.0$ の 4 つの場合を例として、図 2 に描きました。

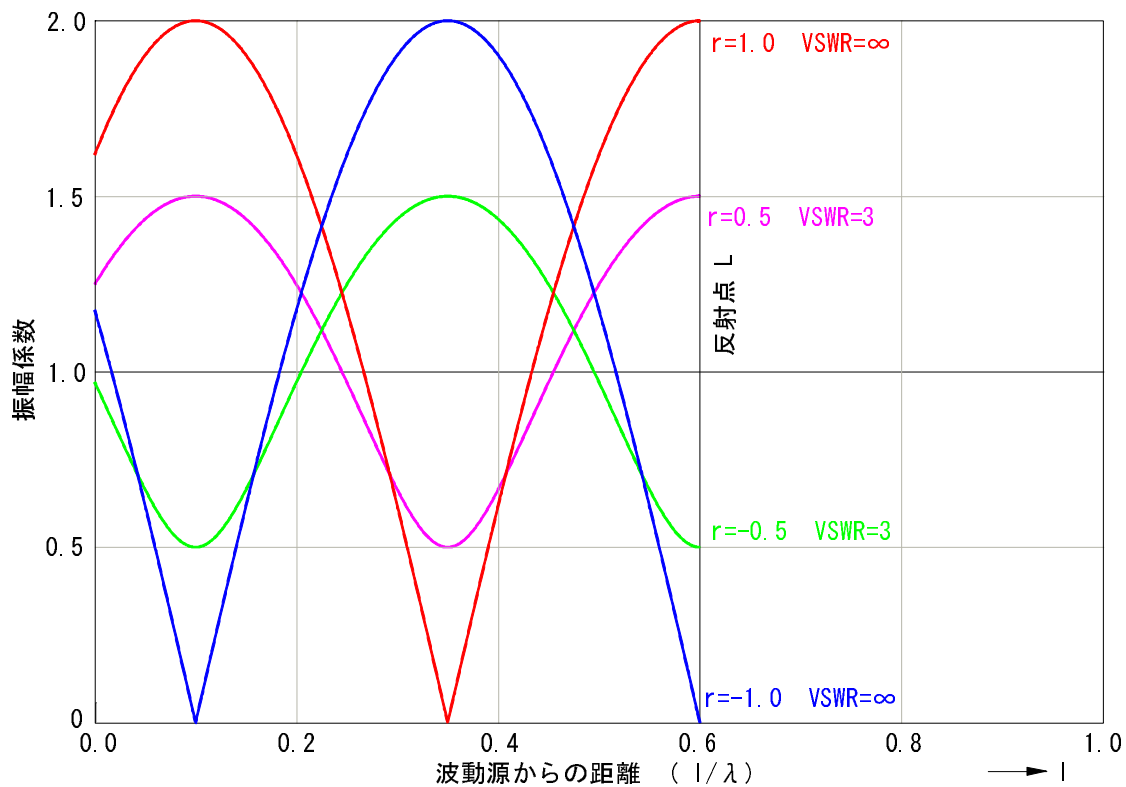


図 2: 反射係数と線路上の振幅係数の関係 ($L = 0.6\lambda$ の場合)

図から読み取れるとおり、定在波は振幅最大点(ポジティブピーク)と最小点(ネガティブピーク)が生じます。 $r > 0$ の場合には反射点に振幅最大点が生じ、 $r < 0$ の場合には反射点で振幅最小点となります。そして、振幅最大点と波動源に向かって次の振幅最大点の間隔は 0.5λ となり、振幅最小点の隣合う間隔も同じです。

もう一つ顕著な特徴は、 $r = |1|$ の場合には振幅最小点が急峻な谷となりますが、 $r = 0$ に近づく程に振幅特性がサイン状に似てきます。

2.2 反射点 L が異なる場合の定在波

次に反射点 L の位置によって定在波の発生状態が変わるかどうかを調べます。ここでは、仮に $r = 0.5$ と置いて計算します。その結果を、 $L = 0.4\lambda$ 、 $L = 0.5\lambda$ および $L = 0.6\lambda$ の 3 つの場合を例として、図 3 に描きました。

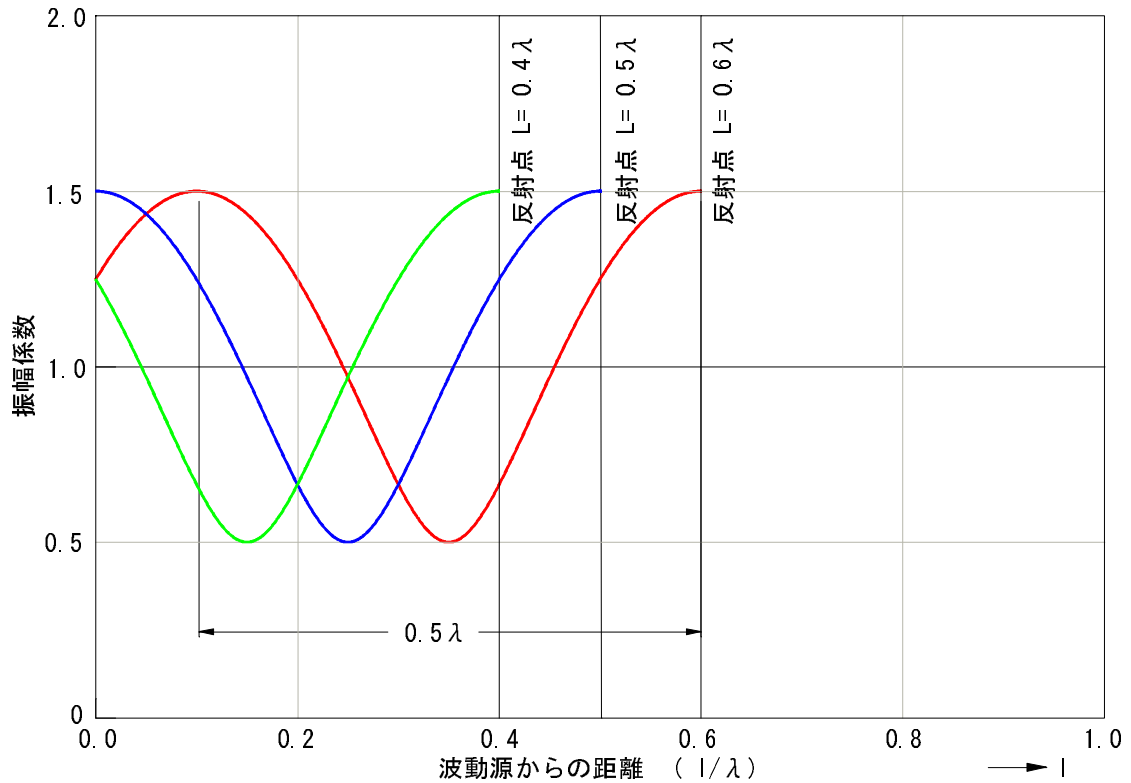


図 3: 反射点と線路上の振幅係数の関係 ($r = 0.5$ の場合)

図が示すとおり、反射点の位置が伝送線路上のどの位置にあっても、振幅係数の特性は変わることがありません。隣り合う振幅最大点または振幅最小点の間隔は、ここでも 0.5λ を維持しています。

3 定在波の扱い方

実用回路における定在波の発生とその影響の具合を調べてみます。

振動源の出力インピーダンスと伝送線の特性インピーダンスは、適当な整合回路を用いることにより容易に整合できますので、一般的に伝送線の入力側では反射が存在しないとして取り扱うことができます。問題になるのは、伝送線の特性インピーダンスと負荷インピーダンスが一致しない(つまり不整合)場合に生じる定在波についてです。

図 4(A) に示す伝送線の先端開放の場合の振幅係数の最大値が“2”となることは式 7 で求められたとおりです。この値は、伝送線の長さとは無関係です。

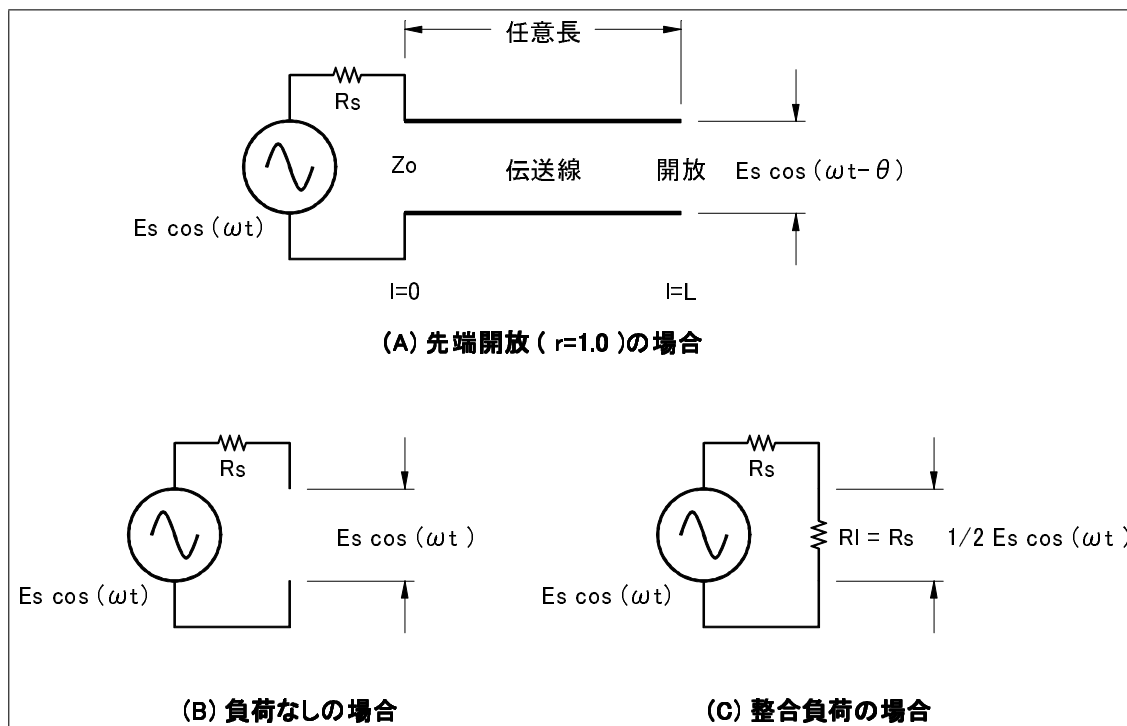


図 4: 伝送線の前開放の場合の電圧は振動源の電圧 (無負荷出力電圧) と同じ

ということは、図 4(B) に示す伝送線がない場合と全く変わらないことになり、整合負荷に供給される電圧の 2 倍となることです。疑いがあるならば、SG と同軸ケーブルを用いて簡単に実験でき、上記と同じ結果を確認できます。

伝送線の前開放の場合には、先端では進行波と反射波が打ち消しあい電流はゼロと考えられます。従ってそこでの見かけ上のインピーダンスは無限大となります。ただし、電圧はあくまでも振動源の電圧以上にはならないのです。

反射波は伝送線の入力側を無反射で通過するので、その電力エネルギーは内部インピーダンスの中で消費されます。